Tentamen Fouriertheorie, 8 november '06, 14:00-17:00

Clarity and tidiness will be taken into account.

(1) De functies $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ worden gegeven door
$f_n(x) = 1 + 2(\cos x)^n + 3(\sin x)^n$.
(a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ bijna overal geldt op $[0, 2\pi]$.
(b) Volgens welke stelling(en) is $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 2\pi$?

(2) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}^m$.
(b) Wat betekent $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?
(c) Hoe wordt $L^2(\mathbb{R})$ gedefiniëerd?

(3) Laat zien dat de deelverzameling $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$ van $\mathbb{R}^2$ Lebesgue maat nul heeft. Welke stelling(en) gebruikt u?

(4) C is de lineaire ruimte, waarvan de elementen de begrensde continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn. Voor $f \in C$ definiëren we $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
(a) Bewijs dat $\|\cdot\|$ een norm is.
(b) Geef de definitie van een Banach ruimte.
(c) Bewijs dat C, voorzien van deze norm een Banach ruimte is. Welke stellingen gebruikt U?

(5) Geef de definitie en een voorbeeld van een Hilbertruimte.

(6) Formuleer Dirichlets stelling over convergentie van Fourierreeksen.

(7) Bewijs dat de Fourierreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{5+n^3} e^{inx}$ uniform convergeert naar een continue differentieerbare functie $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Hint: Bekijk de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{5+n^3} e^{inx}$.

(8) $f(x)$ is de 2π-periodieke functie die voldoet aan $f(x) = x$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Bereken de Fourierreeks R van f. Voor welke x geldt $R(x) = f(x)$?

(9) Laten reële getallen $a_i < b_i$ voor $i = 1, \ldots, m$ gegeven zijn. Definiëer $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 1$ als $x = (x_1, \ldots, x_m)$ voldoet aan $a_i < x_i < b_i$ voor alle i en $f(x) = 0$ voor alle andere $x \in \mathbb{R}^m$. Toon aan dat $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ en bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(f)$.

(10) $f(x) := xe^{-10x^2}$. Bereken $\|f\|_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.